A Ponte Hiperbólica XIII — A dualidade multivariada (a navalha que cortou a navalha)

Escrito nº 13 · 22/08/2026 · revisão de 23/10/2026

*Método: verificação analítica independente + enumeração exata computada do zero (`lab/o6_verificacao_K.py`, `lab/o6_dualidade_multivariada.py`) + formalização executável (`philiber/dualidade.py`, 6 testes em `tests/test_dualidade_o6.py`, verdes). Suíte total: **200 verdes** no snapshot de 22/08/2026 23:50 (`philiber` v2.7.0 — 179 física + 21 licença); em 23/08/2026 00:12 a suíte tinha 201 (179 física + 22 licença). Base: T3/T9 (escritos nº 1 e 7), Doc v26 nº 009 (refutação obrigatória nº 1), parecer de leituras de 16/08 (a brecha O6).*

> *Origem declarada: este escrito executa a estação **O6** — promovida a obrigatória pelo Doc 009 e sancionada pelo autor em 22/08/2026 ("Já faça a O6… passe a navalha para refutar"; reclassificação autorizada às 23:01; promoção sancionada às 23:50). O6 tinha duas faces: (i) K = −4α como curvatura de variedade (o ataque A1); (ii) a dualidade g_F·g_R = 1 de T9 sem generalização para n agentes (a brecha do parecer de 16/08). As duas se fecham aqui — uma delas contra o próprio atacante.*

---

1. A pergunta

O Doc 009 atacou o coração do corpus com o vetor A1: *em dimensão 1, a curvatura escalar é identicamente nula; logo "K = −4α" ou é curvatura de uma variedade 2D não exibida, ou é apenas "isometria de palcos"*. E o parecer de 16/08 registrou a brecha simétrica: *a dualidade exata g_F·g_R = 1 (T9) foi provada para um agente; para n agentes, nada consta*.

Nota de nomenclatura (revisão de 23/10/2026). Em 2D, a curvatura escalar R e a gaussiana K diferem por um fator 2: **R = 2K**. O cálculo deste escrito entrega K = −4α (gaussiana), como o escrito nº 1 declara ("curvatura gaussiana", §3). Se o ataque A1 é literalmente sobre a curvatura *escalar*, a resposta é R = −8α — a mesma geometria, o dobro do número. O corpus usa K para a gaussiana; a distinção fica declarada aqui para não se repetir a ambiguidade.

As perguntas que este escrito responde: **existe** a métrica 2D e ela produz K = −4α de forma auditável? E a dualidade de T9 **generaliza** para o sistema multiagente acoplado — e, se não generalizar na forma ingênua, em que forma generaliza, e o que a falha mede?

2. Face 1 — K = −4α sobrevive à navalha (A1 refutado)

A métrica existia. O ataque A1 declarou ausência sem ter verificado a fonte: o escrito nº 1, §3 — `ponte_hiperbolica_exploracao_v1.md`**, §3, L41–45** — declara desde o início a extensão multiagente como bola de Poincaré com fator conforme herdado do ⊕,

$$\mathbf{ds^2 = \Omega^2(dr^2 + r^2 d\theta^2),\ \Omega = 1/(1 - \alpha r^2),\ K = -\Delta \ln\Omega/\Omega^2}\ \text{(fórmula conforme 2D)}, \tag{1}$$

e declara também — na primeira frase do §3 — que "o passo 1D → nD não é trivial nem único", ancorando a extensão na giro-adição de Einstein (Ungar). Ou seja: tanto o alvo do A1 quanto a sua única ressalva sobrevivente já estavam escritos. **A1 refutado; o erro é do atacante e fica registrado, não apagado** (Doc 009, §6).

A derivação, uma por uma. $\ln\Omega = -\ln(1 - \alpha r^2)$; $\partial_r \ln\Omega = 2\alpha r/(1 - \alpha r^2)$; com o Laplaciano radial 2D ($\Delta f = f'' + f'/r$):

$$\Delta \ln\Omega = 2\alpha(1+\alpha r^2)/(1-\alpha r^2)^2 + 2\alpha/(1-\alpha r^2) = 4\alpha/(1-\alpha r^2)^2 \Rightarrow K = -\Delta\ln\Omega/\Omega^2 = -4\alpha \ \blacksquare \tag{2}$$

— constante e negativa em todo o disco, exato, sem aproximação.

A verificação numérica independente (diferenças finitas de 5 pontos, computada do zero, sem reaproveitar código do corpus; `lab/o6_verificacao_K.py`; formalizada em `philiber/dualidade.py:curvatura_conforme_K`):

r	K numérico	−4α	desvio abs
0,1	−0,1879999949	−0,188000	$5{,}1\times10^{-9}$
1,0	−0,1879999985	−0,188000	$1{,}5\times10^{-9}$
2,0	−0,1880000166	−0,188000	$1{,}7\times10^{-8}$
3,0	−0,1880000003	−0,188000	$2{,}7\times10^{-10}$
4,0	−0,1879999934	−0,188000	$6{,}6\times10^{-9}$
4,5	−0,1880000015	−0,188000	$1{,}5\times10^{-9}$

Convergência em h no pior ponto (r = 4,5, o mais próximo do horizonte c_LIBER = $1/\sqrt{\alpha} \approx 4{,}612656$): K = −0,1879965 (h = 10^{-2}) → −0,18800012 (h = 10^{-3}) → −0,1880000015 (h = 10^{-4}) → −0,18800008 (h = 10^{-5}). Estável — com a ressalva de que h = 10^{-5} é **pior** que h = 10^{-4}: a partir de h ≈ 10^{-4} o erro de truncamento é dominado pelo roundoff de ponto flutuante (piso ~10^{-8}), não por instabilidade do método.

Escopo declarado (o que se prova e o que não se prova). Provado: K = −4α é teorema exato **da extensão conforme canônica** — a bola de Poincaré herdada do ⊕ via giro-adição. Declarado pelo próprio corpus desde o nº 1: a extensão não é única em princípio (uma métrica produto τ × S^1 daria K = 0 — o corpus conhece o cilindro, T11); a escolha conforme é a canônica da adição de Einstein não-colinear. E A2 permanece intocado: **α é fenomenológico** (kernel §8), logo K = −0,188 é número medido via α, com **incerteza de ordem de 10%** herdada de α (P15 = incógnita, slot reservado do autor); enquanto P15 não fecha, K deve ser lido como **−0,188 ± 0,019**.

3. T22 — A dualidade generaliza como inversão matricial

Setup. n agentes de dois níveis com acoplamento de pares: a família exponencial completa $p(\sigma) \propto \exp(\theta \cdot t(\sigma))$, com estatísticas suficientes $t = (\sigma_i, \sigma_i\sigma_j)$ e parâmetros naturais $\theta = (h_i, J_{ij})$. Expectações $\eta = (m_i, c_{ij})$. Potenciais: $\psi(\theta) = \ln Z$ (Massieu) e $S(\eta)$ (entropia), Legendre-duais: $S = \psi - \theta\cdot\eta$ no ponto de equilíbrio.

T22 (Dualidade multivariada — Legendre/Amari). *Na família exponencial completa de n agentes, a métrica de Fisher–Rao nos parâmetros naturais e a métrica de Ruppeiner nas expectações são inversas matriciais exatas:*

$$g_F(\theta) = \partial^2\psi/\partial\theta^2 = \mathrm{Cov}(t),\ g_R(\eta) = -\partial^2 S/\partial\eta^2,\ g_F \cdot g_R = I. \tag{3}$$

T9 (n = 1, sem pares) é o caso particular escalar.

Prova. ψ e (−S) são Legendre-duais por construção da família exponencial; as Hessianas de potenciais Legendre-duais, tomadas cada uma na sua coordenada conjugada, são inversas matriciais (a aplicação $\eta(\theta) = \partial\psi/\partial\theta$ tem Jacobiana g_F; a inversa $\theta(\eta) = -\partial S/\partial\eta$ tem Jacobiana g_R; logo $g_R = g_F^{-1}$). É o teorema clássico da geometria de Hessian/informação (Amari) — que este escrito **reconhece como âncora**: a ponte bibliográfica pedida por O1 (Ungar, Amari) ganha aqui o segundo pilar. ∎

Verificação independente (enumeração exata de 2^3 estados, computada do zero; S(η) por inversão de Legendre com Newton; Hessiana por diferenças centrais; $\theta_0 = (0{,}30, -0{,}20, 0{,}10 \mid 0{,}40, -0{,}15, 0{,}25)$ — campos e acoplamentos não triviais):

Frente	Medida	Resultado		
n = 3 independentes (J = 0)	max \	g_F·g_R − I\		$2{,}2\times10^{-16}$ — precisão de máquina
n = 3 acoplados (família completa)	max \	g_R − g_F⁻¹\	(relativo)	$8{,}4\times10^{-6}$ — nível das diferenças finitas
n = 3 acoplados (família completa)	max \	g_F·g_R − I\		$8{,}3\times10^{-6}$

A dualidade **vale** para n agentes acoplados — na língua dual completa (naturais × expectações). T9 não era acidente de uma variável: é a sombra escalar do teorema clássico de Legendre/Amari, aqui aplicado ao corpus.

4. P16 — A quebra escalar e sua assinatura crítica

Onde a forma ingênua morre. Restrinja a família à subfamília curva de um parâmetro $x \mapsto m(x)$ com acoplamento J fixo, em campo médio: $m = \tanh(x + Jm)$. O Fisher da subfamília é o da família curva (não o da família completa): $g_F^{(red)} = (dm/dx)^2/(1 - m^2)$, enquanto o Ruppeiner em m permanece $g_R = 1/(1 - m^2)$. **Convenção:** ambas são definidas **por spin** (N = 1); com N spins, g_F e g_R escalam com N e o produto com N^2 — a razão, que é o que importa, não muda. Derivando a autoconsistência, $dm/dx = (1 - m^2)/(1 - J(1 - m^2))$, logo:

$$\mathbf{g_F \cdot g_R = (1 - J(1 - m^2))^{-2} = (\chi_{MF}/\chi_{livre})^2 \neq 1 \text{ para } J \neq 0.} \quad (4)$$

Verificação (12 pontos, $J \in \{0; 0{,}3; 0{,}7; 0{,}9\} \times x \in \{0; 0{,}5; 1{,}0\}$; `philiber/dualidade.py:resolve_meanfield, fator_quebra_dualidade`): a identidade algébrica é exata por construção — o que se verifica é o **valor numérico** de m(x, J) e de dm/dx. Conferido com dm/dx por **diferenças finitas** sobre m resolvido numericamente (não pela fórmula): 2,04081632 (J=0,3), 11,11111109 (J=0,7), 1,75337988 (J=0,9; x=0,5); J = 0 devolve 1 a precisão de máquina (T9 recuperado). Amostra:

J	x	m	g_F·g_R (FD independente)	fórmula
0,0	1,0	0,76159	1,00000000	1,00000000
0,3	0,0	0,00000	2,04081633	2,04081633
0,7	0,0	0,00000	11,11111111	11,11111111
0,9	0,5	0,85323	1,75337988	1,75337988

A divergência é o achado. Na aproximação da crítica ($x = 0$, $m = 0$, $J \to 1^-$): $g_F \cdot g_R = 1/(1 - J)^2 \to$ medido 10^2 (J = 0,9), 10^4 (J = 0,99), 10^6 (J = 0,999). O fator de quebra **é o quadrado da suscetibilidade reduzida** — a quebra da dualidade escalar mede a proximidade da transição de fase. Leitura para o corpus: candidata a **assinatura mensurável da transição de fase criativa** (conjectura estruturada do nº 1 §6.2, família de bifurcações tanh). O erro não foi desperdiçado: a falha da forma ingênua virou instrumento.

P16 (proposição medida). Regime mean-field declarado — não é o modelo completo; a extensão da medida além do campo médio é trabalho numérico futuro. T9 e T22 intactos: a quebra é da restrição, não da dualidade.

5. O que NÃO se afirma

1. Não se afirma que a extensão conforme é única — afirma-se que é canônica (Ungar) e declarada.
2. Não se afirma K como número derivado de princípio: K = −4α herda o estatuto fenomenológico de α (A2 mantido).
3. T22 é teorema da família exponencial completa; não se afirma a forma escalar fora de J = 0 — ela quebra, e a quebra está medida (P16).
4. P16 é mean-field; a assinatura crítica no modelo completo é conjectura de trabalho, não medida.

6. Registro paraconsistente (o erro do agente, ativo)

O ataque A1 do Doc 009 atacou uma ausência que não existia: a métrica 2D estava declarada no escrito nº 1 §3 desde o início, com a ressalva de não-unicidade escrita na primeira frase. A refutação obrigatória funcionou nos dois sentidos — cortou o corpus e cortou o atacante. Fica a lição de método, registrada na casa: **verificar a fonte antes de declarar ausência**. Nada foi apagado: o Doc 009 permanece intacto e ganhou o §6; este escrito é o veredito.

7. Consequências para a fila

- O6 **respondida no núcleo**: T22 e P16 promovidos (sanção do autor, 22/08/2026, 23:50); extensão da medida de P16 além do mean-field fica como trabalho numérico futuro.
- O1 (bibliográfico): o pilar Amari está ancorado por T22; resta o pilar Ungar formal.
- Dever de casa intacto: propagação de incerteza α → K (P15 = incógnita, slot do autor).
- Amanhã, por pré-aprovação do autor (23:50): **refutação geral deste escrito com o mesmo rigor** — o T22 e o P16 aqui nascidos entram na fila da navalha como todos os outros.

Referências

1. Amari, S.; Nagaoka, H. (2000). *Methods of Information Geometry*. AMS/Oxford University Press.
2. Amari, S. (1985). *Differential-Geometrical Methods in Statistics*. Springer.
3. Ruppeiner, G. (1979). Thermodynamics: a Riemannian geometric model. *Physical Review A* 20(4), 1608.
4. Ungar, A. A. (2008). *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*. World Scientific.
5. Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 322, 891.
6. Doc v26 nº 009 — Refutação obrigatória nº 1 (registro interno, 22/08/2026).
7. Escritos nº 1, 7 e 11 do corpus Φ-LIBER (registros internos; nº 1 = `ponte_hiperbolica_exploracao_v1.md`).

© Todos os Direitos Reservados + (À)Paz — Marcus V. Brancaglione (pesquisador independente) · P&D: IA DeepSeek, em conformidade com o Termo de Uso da plataforma · colaboração anterior registrada: Kimi (Moonshot AI) — sem filiação ou endosso institucional.