

A Ponte Hiperbólica VII — O Dicionário Ruppeiner-Lobachevsky

A entropia como geometria, a pureza no horizonte, e o espelho de dois estados

Série Φ -LIBER · Escrito de pesquisa nº 7 (retomada de O1) · 27/07/2026 Marcus V. Brancaglione · Exploração e verificação: Kimi (Moonshot AI)

Licença: © Todos os Direitos Reservados + (À)Paz — Marcus V. Brancaglione

Método: derivação analítica independente + instrumento (phiber/dicionario.py, 10 testes).
Suíte total: **109 verdes**. Base axiomática: Documento Fundacional + Docs v26 nº 001 ($\oplus$ canônico) e nº 002 (ε canônica).

1. A pergunta deste escrito

O1 estacionava desde 22/07 com quatro linhas registradas (NOTA_achado_principal_geometria_hiperbolica.md): gyrogrupos (respondida no nº 6), τ como coordenada (respondida: A4/T3/T4), c_{LIBER} como horizonte, e — a linha que o autor marcou como de interesse especial — a **entropia**: $f(x) = x \cdot \ln x$ na ponte hiperbólica, $S = \ln(2 \cosh x) - x \cdot \tanh x$, Fisher-Rao, e o campo médio $m = \tanh(\beta m)$ como espelho térmico do limiar criativo. Antes de atacá-las, um fato de proveniência que a leva 4 tornou definitivo: **grep exaustivo em todo o corpus 2024-2026 (218 arquivos) encontrou zero ocorrências de Ruppeiner, curvatura negativa ou $K = -4\alpha$** — a ponte hiperbólica é produção original deste arco, não redescoberta (processamento nº 8, achado (a)). O que este escrito prova, prova pela primeira vez.

2. Teorema 9 — O dicionário Ruppeiner-Lobachevsky

O sistema de dois níveis com parâmetro natural x e o disco de composição do $\oplus$ são o mesmo objeto em três línguas — termodinâmica, geometria, composição — e o dicionário entre elas é exato:

#	Termodinâmica	Geometria hiperbólica	Composição ($\oplus$)		
R1	parâmetro natural x	rapidez $\tau =$ distância A5 de 0 a m	log-razão de amplitudes		
R2	$Z = 2 \cosh x$	$\cosh$ da distância	normalização do par		
R3	momento $m = \partial \ln Z / \partial x = \tanh x$	ponto do disco $\backslash$	$m \backslash$	< 1	amplitude composta
R4	$S = \ln Z - x \cdot m$ (Legendre)	entropia como função da distância	pureza da composição		
R5	Fisher-Rao: $g_F = \partial^2 \ln Z / \partial x^2 = \text{sech}^2 x$	Jacobiano dm/dx	taxa de saturação do $\oplus$		

#	Termodinâmica	Geometria hiperbólica	Composição (⊕)		
R6	Ruppeiner: $g_R = -\partial^2 S / \partial m^2 = 1/(1-m^2)$	raiz da métrica A5	rigidez da composição		

Provas (uma linha cada, verificação em máquina na bateria):

- **R1/R3:** $m = \tanh x \implies$ distância A5 ($ds^2 = da^2/(1-\alpha a^2)^2$, $\alpha = 1$) de 0 a m é $\int_0^m da'/(1-a'^2) = \operatorname{atanh} m = x$. $\square$
- **R3:** $\partial \ln Z / \partial x = (2 \sinh x) / (2 \cosh x) = \tanh x$. $\square$
- **R4:** $S = \ln(2 \cosh x) - x \cdot \tanh x \equiv \ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)$ — a entropia binária (verificada a 10^{-12} , não por acaso: é a entropia de von Neumann de $\rho = e^{\{x\sigma\}}/Z$). $\square$
- **R5:** $\partial^2 \ln Z / \partial x^2 = \partial(\tanh x) / \partial x = \operatorname{sech}^2 x$. $\square$
- **R6:** $dS/dm = -\operatorname{atanh} m = -x$ (T4 do Fundacional) $\implies -d^2 S / dm^2 = 1/(1-m^2)$. $\square$
- **Dualidade (corolário imediato):** $g_F(x) \cdot g_R(m(x)) = \operatorname{sech}^2 x \cdot \cosh^2 x = 1$ — Fisher e Ruppeiner são métricas inversas nos parâmetros conjugados, exatamente. $\square$

Nota de convenção (2.6): na convenção $K = -1$ do disco de Poincaré (giro.py), a distância centro $\rightarrow m$ é $2x$ — fator 2 de convenção métrica ($A5 = (1/4\alpha) \times$ métrica $K=-1$), não de física. Registrado para que nenhum "fator 2" futuro vire mistério.

3. Teorema 10 — A pureza no horizonte

$S(x)$ decresce monotonicamente de $\ln 2$ (centro do disco) a 0 (horizonte), com forma assintótica $S(x) \sim (1+2x) \cdot e^{-2x}$.

Prova: $dS/dx = -x \cdot \operatorname{sech}^2 x < 0$ para $x > 0$ (monotonia); $S(0) = \ln 2$; para $x \rightarrow \infty$, $\ln(2 \cosh x) = x + \ln(1+e^{-2x})$ e $\tanh x = 1 - 2e^{-2x} + O(e^{-4x})$, logo $S = e^{-2x}(1 + 2x) + O(x \cdot e^{-4x}) \rightarrow 0$. $\square$ Bateria: monotonia em 200 pontos, assintótica a $< 10^{-3}$ relativo em $x \in \{5, 8, 12\}$, $S(m \rightarrow 1) < 10^{-4}$.

Leitura (interna ao modelo): compor em direção ao horizonte é **purificar** — a saturação do $\oplus$ ($\sup a \oplus a = c_{\text{LIBER}}$) é também o limite de pureza do estado de dois níveis associado. No centro, máxima ignorância ($\ln 2$); na borda, certeza total. A intuição de buraco negro sai invertida — e a inversão é um fato do modelo, não uma licença poética: para esta geometria, o horizonte guarda estados puros, não entropia máxima. O que isso significa para *informação* no horizonte fica registrado como problema aberto (§6, O5).

4. O espelho de dois estados — P6 (medido)

A linha 4 da NOTA pedia: $m = \tanh(\beta m)$ como espelho térmico do limiar criativo. O espelho correto não é do monoagente (T6 provou: 1 poço duplo $0+1D$ não tem ponto crítico — "sempre condensado") e sim da **transição coletiva do nº 6**: a redução de dois estados do campo médio de Weiss dá $m = \tanh(\beta \cdot g \cdot \Phi^2_{\text{vac}} \cdot m)$, com ponto crítico em

$$**g_{MF} = T/\Phi^2_{\text{vac}} = 0,5/e = 0,184*$$

($\Phi^2_{\text{vac}} = m^2/b = e$, com os parâmetros padrão $m^2 = e$, $b = 1$ do A2 — a barreira $\Delta V = 1,8473$ do Fundacional). Contra a medida do nº 6 (mesma T , mesmo protocolo): $*g| = 0,5 \pm$ varredura ($\Delta g = 0,1-0,2$)**.

**Razão medida:* $g|/g_{MF} \approx 2,7$. *Leitura honesta: o espelho de dois estados *subestima* o custo de coordenação por fator $\sim 2,7$ — a diferença é o preço da dinâmica contínua entre os poços (Kramers, nº 4-5), que a redução a dois níveis apaga. O espelho qualitativo é real (existe limiar,

é térmico, escala com T/Φ^2); o quantitativo fica devendo — e fica **medido** quanto deve.

Curiosidade registrada (não é resultado): com $T = 0,5$ e $g^*_\text{medido} = 0,5$, a razão sai numericamente $\approx e$ — artefato da escolha $T = 0,5$ do protocolo, não estrutura. Vai para a bateria como nota de rodapé, não como epígrafe.

5. Não-afirmações (padrão do projeto)

1. R4 identifica a entropia do corpus com a entropia de von Neumann **do sistema de dois níveis** — não com a de uma matriz densidade derivada da dinâmica Φ -LIBER completa (essa derivação não existe; a da v25.2 §7 era analogia formal, como registrou a leva 4).
2. A dualidade $g_F \cdot g_R = 1$ é um fato de famílias exponenciais 1D — elegante, mas dimensionalmente modesto; não generalizamos para n agentes sem prova.
3. O espelho de dois estados (P6) é **proposição medida** — a razão 2,7 carrega a incerteza da varredura de g^* do nº 6.
4. Nada aqui afirma física do universo observável; o escopo do paper v26 permanece.
5. α permanece fenomenológico — o dicionário inteiro é invariante sob reescalonamento (só c_LIBER é estrutural).

6. O que se abre

- **O5 (novo, registrado):** informação no horizonte — T10 prova pureza; a pergunta de capacidade/bounds (a linha " c_LIBER como horizonte, vínculo com Bekenstein" da NOTA) exige contar estados distinguíveis em bola de rapidez finita na métrica de Fisher. Divergência ingênua já visível: o volume de Fisher diverge logaritmicamente — a pergunta correta precisa de regularização física, não de entusiasmo.
- **O2 (entropia toroidal) ganhou seu combustível:** com $S(\tau) = \ln(2 \cosh \tau) - \tau \cdot \tanh \tau$ agora **geometrizada** (R4) e o toro T^2 condenado a renascer em coordenadas canônicas (Doc 002, §4.6), a entropia toroidal pode ser reconstruída como entropia sobre ciclos de rapidez $\times \varepsilon$ — hipótese de trabalho já escrita, solo axiomatizado.
- **O1 segue aberto na parte bibliográfica:** ponte formal com gyrogrupos de Ungar (nº 2, nº 6) e com geometria da informação (Amari) — o dicionário deste escrito é a entrada dessa conversa com a literatura, quando o autor quiser travá-la.

Referências (acréscimos)

40. Ruppeiner, G. (1995). *Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory*. Rev. Mod. Phys. 67, 605 (métrica de Ruppeiner — T4, R6).
41. Amari, S. (2016). *Information Geometry and Its Applications*. Springer (Fisher-Rao, famílias exponenciais — R5, dualidade).
42. Bragg, W. L. & Williams, E. J. (1934). *The effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys*. Proc. R. Soc. A 145 (campo médio de dois estados — P6).

Reprodutibilidade: philiber/dicionario.py + tests/test_dicionario.py (10 testes; suíte total: **109 verdes** — philiber v2.1.0). Provas de R1-R6 e T10 neste texto; P6 computado a partir dos valores publicados do nº 6 e do A2, com as contas na seção 4.