

# A Ponte Hiperbólica — Exploração Aprofundada I

## O operador criativo $\oplus$ como isometria, horizonte e termodinâmica

Série  $\Phi$ -LIBER · Escrito de pesquisa nº 1 · 21/07/2026 Marcus V. Brancaglione · Exploração e verificação: Kimi (Moonshot AI)

Licença: © Todos os Direitos Reservados + (À)Paz — Marcus V. Brancaglione

Método: derivação independente + 7 baterias de verificação numérica (`_exploracao_ponte.py`) — mesmo padrão da auditoria do kernel v1.0.

*Origem deste escrito: nota registrada pelo autor em 21/07/2026, marcando o achado da **geometria hiperbólica disfarçada** como o principal da consolidação  $\Phi$ -LIBER e destinando-o a exploração aprofundada — **incluindo, como linha de interesse especial, a entropia toroidal (§6).***

### 1. Ponto de partida: o que já era teorema

Do kernel v1.0 (paper v26.0, §2): no domínio  $|a| < c\_LIBER = 1/\sqrt{\alpha}$ ,

$a \oplus b = (1/\sqrt{\alpha}) \cdot \tanh(\tau(a) + \tau(b))$ , com  $\tau(a) = \operatorname{atanh}(\sqrt{\alpha} \cdot a)$ ,

ou seja,  $\oplus$  é a adição de Einstein das velocidades colineares com velocidade-limite  $c\_LIBER$ , e a rapidez  $\tau$  é aditiva:  $\tau(a \oplus b) = \tau(a) + \tau(b)$ . Pergunta desta exploração: *o que mais está escondido na mesma estrutura?* Resposta: tudo. A estrutura é muito maior que o operador que a revelou.

### 2. Resultado novo nº 1: $\oplus$ é isometria da própria geometria

Defina a distância hiperbólica 1D herdada do  $\oplus$ :

$$d(a, b) = |\tau(a) - \tau(b)| / \sqrt{\alpha}$$

**Proposição A (invariância).** A composição por  $\oplus$  preserva distâncias:  $d(a \oplus u, b \oplus u) = d(a, b)$  para todo  $u$  no domínio. O operador criativo é uma **isometria** da geometria que ele próprio induz.

*Demonstração.*  $\tau(a \oplus u) = \tau(a) + \tau(u)$  (Teorema 3 do kernel). Logo  $d(a \oplus u, b \oplus u) = |\tau(a) + \tau(u) - \tau(b) - \tau(u)| / \sqrt{\alpha} = |\tau(a) - \tau(b)| / \sqrt{\alpha} = d(a, b)$ .  $\square$

Verificação numérica:  $d(0,5 \oplus 1, 2,0 \oplus 1) = 1,6397255741 = d(0,5; 2,0)$  — 10 casas decimais. Aditividade geodésica verificada:  $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c) = 5,5940779035$ .

**Leitura:** em relatividade, compor velocidades é um *boost* — e boosts são isometrias do espaço de velocidades (que é, ele próprio, um espaço hiperbólico: o "espaço de rapidez"). O  $\oplus$  não apenas *usa* geometria hiperbólica: ele **é o grupo de movimentos** dessa geometria. Criar, na linguagem do modelo, é deslocar-se sem deformar.

### 3. Resultado novo nº 2: a extensão multidimensional tem curvatura $-4\alpha$

O passo 1D  $\rightarrow$  nD não é trivial nem único — e a honestidade exige dizer isso. Em relatividade, a adição de Einstein de velocidades **não** colineares não é comutativa nem associativa: é **giro-comutativa e giro-associativa** (Ungar), estrutura de *gyrogrupo* — a não-associatividade é medida pela rotação de Thomas-Wigner. A extensão natural do  $\oplus$  para o espaço multiagente  $\varepsilon$

$= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  do Teorema 1 é, portanto, a giro-adição na bola de Poincaré.

A fatia radial dessa bola herda do  $\oplus$  a métrica conforme  $\Omega = 1/(1-\alpha r^2)$ . Cálculo da curvatura gaussiana (fórmula conforme  $K = -\Delta \ln \Omega / \Omega^2$ ):

**$K = -4\alpha$  — constante e negativa em todo o disco.**

Verificação numérica em 5 pontos (incluindo centro e borda):  $K = -0,188000 = -4 \times 0,047$  em todos, por diferenças finitas. Com  $\alpha = 0,047$ : o espaço criativo multiagente é um espaço de Lobachevsky de curvatura  $-0,188$ , raio de curvatura  $1/(2\sqrt{\alpha}) = c\_LIBER/2 \approx 2,31$ .

**Leitura:** curvatura negativa constante é a geometria do crescimento exponencial — o número de pontos a distância  $\leq r$  cresce como  $e^{(r/\rho)}$ . É a formalização geométrica da intuição do corpus de que "o espaço do possível se expande ao criar": em geometria euclidiana o possível cresce polinomialmente; no espaço LIBER, exponencialmente. E a não-associatividade nD (rotação de Thomas) sugere uma leitura fina: **a ordem das colaborações criativas deixa uma "rotação" residual mensurável** — holonomia como memória do percurso. Hipótese registrada para o escrito nº 2.

## 4. c\_LIBER como horizonte

A distância própria de 0 até um ponto  $a$  é  $\int_0^a da'/(1-\alpha a'^2) = \tau(a)/\sqrt{\alpha}$  — que **diverge** quando  $a \rightarrow c\_LIBER$ :

| a        | distância própria |
|----------|-------------------|
| 0,9·c    | 6,79              |
| 0,99·c   | 12,21             |
| 0,999·c  | 17,53             |
| 0,9999·c | 22,84             |

**Proposição B.** A fronteira do domínio criativo está a distância infinita:  $c\_LIBER$  é inalcançável por composições finitas. O teto de auto-composição ( $\sup a \oplus a = c\_LIBER$ , kernel §4) e a não-monotonicidade além do domínio são as sombras algébricas desse horizonte geométrico.

A analogia é com horizontes de eventos: coordenadas finitas (a) cobrem uma região de tamanho próprio infinito; o observador interno nunca "chega" à borda. Vínculo com a física de bounds de informação (Bekenstein 1973; 't Hooft 1993): horizontes geométricos carregam conteúdo informacional máximo — o que conecta este § à entropia toroidal (§6). Nota de rigor: a analogia é estrutural (geometria do espaço de estados), não uma afirmação sobre espaço-tempo físico (§8).

## 5. Resultado novo nº 3: $\tau$ é a distância termodinâmica deuppeiner

Aqui a ponte toca a termodinâmica — e a linha da entropia pedida pelo autor começa.

**Sistema de dois níveis** (energias  $\pm E$ , inverso de temperatura  $\beta$ ;  $x = \beta E$ ): a entropia de von Neumann/Gibbs tem forma fechada

$$S(x) = \ln(2 \cosh x) - x \cdot \tanh x$$

verificada contra a soma direta  $-\sum p_i \ln p_i$  com erro de máquina ( $\sim 10^{-16}$ ) em toda a grade. Reparem: **cosh e tanh — as mesmas funções do  $\oplus$** . Mas há mais. Parametrize pela magnetização média  $m = \tanh x$ . A entropia em função de  $m$  é  $S(m) = \ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) -$

$\frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)$ , e sua curvatura:

$$d^2S/dm^2 = -1/(1-m^2) \text{ (verificado numericamente: } -1,190476 = -1/(1-0,16))$$

A geometria termodinâmica de Ruppeiner define a distância entre estados de equilíbrio pela métrica do Hessiano da entropia:  $ds^2 = -d^2S \cdot dm^2 = dm^2/(1-m^2)$ . Integrando:

$$\text{distância termodinâmica}(m_1, m_2) = |\operatorname{atanh} m_1 - \operatorname{atanh} m_2|$$

**Proposição C.** *Com a normalização  $m = \sqrt{\alpha \cdot a}$ , a rapidez criativa  $\tau$  do operador  $\oplus$  é **exatamente** a distância termodinâmica de Ruppeiner do sistema de dois níveis. A "coordenada linearizante" descoberta na auditoria algébrica é a distância que a termodinâmica atribui à separação entre estados de equilíbrio.*

Complemento de geometria da informação: a métrica de Fisher-Rao da família gaussiana  $(\mu, \sigma)$  é  $ds^2 = (d\mu^2 + 2d\sigma^2)/\sigma^2$  — o semiplano de Poincaré com curvatura constante  $-1/2$  (verificado numericamente:  $K = -0,5$  em 3 pontos). Ou seja: **espaços hiperbólicos são a geometria nativa da informação estatística** — e o  $\oplus$  chegou a eles por um caminho independente, partindo de uma equação funcional de "soma saturada".

## 6. A linha da entropia toroidal (pedido especial do autor)

### 6.1 Por que $x \cdot \ln x$ e $\tanh$ são a mesma família

A forma  $f(x) = x \cdot \ln x$  (paper v26.0, §6: convexa, mínimo em  $1/e$ ) governa a entropia de von Neumann, Stirling e Bekenstein. A entropia de dois níveis (§5) mostra a outra face:  $S$  como função de  $\tanh$ . As duas se encontram porque  $\ln$  e  $\operatorname{atanh}$  são inversas funcionais da mesma dupla:  **$\operatorname{atanh} m = \frac{1}{2} \cdot \ln((1+m)/(1-m))$**  — um logaritmo de razão, exatamente a estrutura de  $x \cdot \ln x$  quando  $x$  é lido como razão de pesos. A "entropia toroidal" do modelo e a "rapidez hiperbólica" são duas coordenadas da mesma superfície termodinâmica.

### 6.2 O espelho térmico do limiar criativo

A transição de fase do modelo (paper v26.0, §5: discriminante da cúbica, limiar absorvente em  $\varepsilon_{\min} \approx 1,6$ ) tem um gêmeo térmico clássico: a transição de campo médio de Ising,  $m = \tanh(\beta m)$ :

| $\beta$         | $m^*$                                 |
|-----------------|---------------------------------------|
| 0,5 - 0,99      | 0 (fase desordenada)                  |
| 1,0             | ponto crítico $\beta_c = 1$           |
| 1,5 / 2,0 / 3,0 | 0,859 / 0,958 / 0,995 (fase ordenada) |

Perto do crítico:  $m \approx \sqrt{3(\beta-1)}$  — expoente crítico mean-field  $1/2$  (verificado: 0,371 vs 0,387 em  $\beta=1,05$ ). O paralelo estrutural:

| Transição LIBER                                            | Transição térmica (Ising mean-field)                   |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| parâmetro de controle $\varepsilon$ (liberdade)            | parâmetro de controle $\beta$ (inverso da temperatura) |
| limiar $\varepsilon_{\min}$ : abaixo, vácuo único          | $\beta_c = 1$ : abaixo, $m = 0$ único                  |
| acima: coexistência <b>persistente</b> (limiar absorvente) | acima: dois ramos estáveis $\pm m$ persistentes        |
| mecanismo: massa taquionica $e^{\wedge}(\varepsilon^2)$    | mecanismo: acoplamento $\tanh$                         |
| ordem: primeira (discriminante)                            | ordem: segunda (expoente $1/2$ )                       |

**Proposição D (registrada como conjectura de trabalho).** *A transição criativa do modelo pertence à mesma família universal de bifurcações  $\tanh$  que a transição térmica de campo*

médio — com a diferença estrutural de ser de primeira ordem (coexistência por discriminante) e absorvente (sem retorno). A "temperatura" do sistema LIBER é, em imagem precisa, o inverso da liberdade.

6.3 O que isso compra para o modelo

Três dividendos concretos: **(i)** a forma  $S(x) = \ln(2 \cosh x) - x \cdot \tanh x$  dá à teoria uma entropia computável associada à rapidez — candidata a "entropia criativa" formal; **(ii)** a métrica de Ruppeiner fornece critério de estabilidade (curvatura termodinâmica) para o campo  $\Phi$ ; **(iii)** a tabela de analogias acima é o roteiro para calibrar  $\kappa$  e  $\mu_0$  em sistemas análogos — a pendência nº (iii) das limitações do paper v26.0.

7. Síntese: o dicionário  $\Phi$ -LIBER ↔ matemática estabelecida

| Conceito LIBER (corpus)            | Estrutura estabelecida (esta exploração)                     | Status                        |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| soma paraconsistente $\oplus$      | adição de Einstein / gyrogrupo de Ungar                      | teorema (kernel)              |
| rapidez $\tau$ ("kernel temporal") | coordenada de rapidez; distância de Ruppeiner                | teorema (§5)                  |
| $c_{\text{LIBER}} \approx 4,61$    | velocidade-limite; fronteira a distância infinita            | teorema (§4)                  |
| $\oplus$ como dinâmica             | isometria do espaço de rapidez                               | teorema (§2)                  |
| espaço multiagente $\varepsilon$   | disco de Poincaré, $K = -4\alpha \approx -0,188$             | teorema (§3)                  |
| não-associatividade nD             | giro-associatividade; rotação de Thomas-Wigner               | ancoragem (§3)                |
| entropia toroidal $x \cdot \ln x$  | von Neumann/Stirling; $S = \ln(2 \cosh x) - x \cdot \tanh x$ | teorema + ponte (§6.1)        |
| transição de fase criativa         | família de bifurcações tanh (Ising mean-field)               | conjectura estruturada (§6.2) |
| informação $x$                     | Fisher-Rao; semiplano hiperbólico $K = -1/2$                 | ancoragem (§5)                |

8. Não-afirmações (governança — padrão do projeto)

- Todas as analogias físicas são **estruturais**: geometria do espaço de estados do modelo, não afirmações sobre o espaço-tempo ou sistemas térmicos reais.
- A Proposição D é conjectura de trabalho, não teorema — sua prova ou refutação é tarefa do escrito nº 2.
- O valor de  $\alpha$  permanece fenomenológico; note-se, porém, que  $K = -4\alpha$  dá a  $\alpha$  uma leitura geométrica inédita: curvatura do espaço criativo. Isso não deriva  $\alpha$ , mas muda seu estatuto de "número arbitrário" para "curvatura mensurável em princípio".
- Nada aqui afirma consciência, agência ou fenomenologia — permanece a nota epistêmica do corpus.

9. Próximos escritos (roteiro)

- nº 2**: giro-associatividade e rotação de Thomas como "memória do percurso criativo"; prova ou refutação da Proposição D; análise de sensibilidade de  $K = -4\alpha$ .

- **nº 3:** a entropia criativa  $S(x)$  como função de estado do campo  $\Phi$  — candidata a ligar o kernel ao simulador social (produto satélite).

## Referências (acréscimo às do paper v26.0)

15. Ruppeiner, G. (1995). Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory. *Reviews of Modern Physics* 67(3).
16. Amari, S. (2016). *Information Geometry and Its Applications*. Springer.
17. Kass, R. E.; Vos, P. W. (1997). *Geometrical Foundations of Asymptotic Inference*. Wiley.
18. Pathria, R. K.; Beale, P. D. (2011). *Statistical Mechanics*, 3ª ed. (sistema de dois níveis; campo médio de Ising).
19. Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. (1980). *Statistical Physics, Part 1* (teoria de transições de fase).
20. 't Hooft, G. (1993). Dimensional reduction in quantum gravity. (bounds de informação em horizontes).
21. Ungar, A. A. (2008). *Analytic Hyperbolic Geometry...* — rotação de Thomas-Wigner, gyrogrupos.

---

*Apêndice de reprodutibilidade: \_exploracao\_ponte.py — 7 baterias, todos os valores citados neste texto são reproduzíveis numericamente.*