

A Ponte Hiperbólica VIII — O Toro Reconstruído

A barreira de Gauss-Bonnet, o cilindro de rapidez, e a entropia que mora na cintura

Série Φ -LIBER · Escrito de pesquisa nº 8 (O2: entropia toroidal) · 27/07/2026 Marcus V. Brancaglione · Exploração e verificação: Kimi (Moonshot AI)

Licença: © Todos os Direitos Reservados + (À)Paz — Marcus V. Brancaglione

Método: teorema clássico aplicado (Gauss-Bonnet) + construção por quociente + instrumento (philiber/toro.py, 7 testes). Suíte total: **116 verdes**. Base: T9-T10 (nº 7) + Doc v26 nº 002, §4.6.

1. A pergunta deste escrito

O2 era o fio que o autor marcou duas vezes: a **entropia toroidal**. O corpus (v25.2 §7) tinha um toro informacional com $S_{vN} \propto x \cdot \ln x$ sobre T^2 — analogia formal, sem derivação de matriz densidade (veredito da leva 4) — e o Doc 002 decretou: o toro, construído sobre a S^1_τ absorvida, deve **renascer em coordenadas canônicas** (rapidez $\times \varepsilon$). Este escrito executa a reconstrução — e começa por uma sentença que o corpus nunca viu.

2. Teorema 11 — A barreira de Gauss-Bonnet

Enunciado. Nenhuma métrica lisa sobre o toro T^2 tem curvatura constante negativa $K = -4\alpha$. Em particular, um "toro hiperbólico liso" não existe.

Prova (uma linha, teorema clássico): Gauss-Bonnet para superfície fechada: $\int_{T^2} K \, dA = 2\pi\chi(T^2) = 0$ — com $K = -4\alpha < 0$ a integral seria negativa. Contradição. $\square$

Registro (R2 do Fundacional): o "toro hiperbólico liso" junta-se às conjecturas refutadas — registrado, não apagado. E o corpus sai desta refutação *melhor do que entrou*: a sua obsessão com $\chi(\text{Torus}) = 0$ (REO, "teste Torus→Orus") era exatamente o invariante certo — $\chi = 0$ é a assinatura que os dois únicos objetos lícitos compartilham:

- **(a) o toro plano** ($K = 0$): o limite $\alpha \rightarrow 0$, onde a composição vira soma euclidiana — geometria morta, sem achado;
- **(b) o cilindro hiperbólico** $H^2/\langle \text{boost}_\Lambda \rangle$: o quociente do plano de rapidez por um boost de período Λ — $\chi = 0$, $K = -4\alpha$ em toda parte, não compacto (um funil), contendo **uma única geodésica fechada: a cintura, de comprimento Λ** .

Decisão: o objeto canônico da v26 é (b). O "toro" da teoria é o **círculo de rapidez S^1_Λ** — e o produto de ciclos que o Doc 002 pediu se fecha com a ε -compacta: $S^1_\Lambda \times S^1_\varepsilon$. A topologia de toro do corpus sobrevive como *produto de ciclos*; a geometria hiperbólica sobrevive no fator de rapidez; a impossibilidade de as ter *no mesmo T^2 liso* fica provada de uma vez.

3. Teorema 12 — A entropia toroidal canônica

Construção. No círculo de rapidez, cada ponto τ tem imagens $\tau + n\Lambda$ ($n \in \mathbb{Z}$). A entropia total é a soma de imagens:

$S_{\text{cil}}(\tau; \Lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S(\tau + n\Lambda)$, com $S(x) = \ln(2 \cosh x) - x \cdot \tanh x$ (T9-R4).

A convergência é teorema, não esperança: T10 dá $S(x) \sim (1+2x)e^{-2x}$ — a cauda da soma é uma série geométrica. A bateria confirma: convergência em ≤ 39 imagens no pior caso

medido, periodicidade a 3×10^{-16} (precisão de máquina).

Propriedades provadas/medidas:

1. **Periodicidade exata:** $S_{\text{cil}}(\tau + \Lambda) = S_{\text{cil}}(\tau)$ (a soma é invariante por translação de índice). $\square$
2. **Máximo na cintura, mínimo no antípoda:** S decresce em $|x|$ (T10) $\implies$ a soma é máxima em $\tau = 0$ (distâncias 0, Λ , Λ , 2Λ , ...) e mínima em $\tau = \Lambda/2$ (distâncias $\Lambda/2$, $\Lambda/2$, $3\Lambda/2$, ...). $\square$
3. **Limite de funil longo:** $S_{\text{cil}} \rightarrow S$ quando $\Lambda \rightarrow \infty$ (uma imagem só) — precisão de máquina em $\Lambda = 40$. $\square$
4. **Simetrias:** par em τ ; espelho em torno de $\Lambda/2$. $\square$

4. P7 — A entropia mora na cintura (medido)

Λ	$S_{\text{cil}}(0)$	$S_{\text{cil}}(\Lambda/2)$	razão cintura/antípoda
0,5	3,28987	3,28987	1,000 — círculo apertado: uniforme
1,0	1,64585	1,64402	1,001
2,0	0,87954	0,76631	1,148
4,0	0,69919	0,18035	3,877
8,0	0,69315	0,00604	114,8

A lei qualitativa é limpa: **quanto maior o período, mais a entropia se concentra na geodésica fechada**. No limite, a cintura carrega tudo ($S(0) = \ln 2 = 0,69315$ — o valor da coluna $\Lambda = 8$ é o $\ln 2$ da cintura, puro) e o antípoda esvazia.

Leitura interna ao modelo: no funil hiperbólico, a entropia não se espalha — ela *mora* no ciclo mais curto. É a primeira resposta geométrica rigorosa à pergunta que o autor registrou no arco anterior: "*quanta entropia um ciclo completo ao redor do laço produz?*" — resposta parcial e provada: num ciclo de rapidez de período Λ , a entropia do estado é $S_{\text{cil}}(\tau; \Lambda)$, ela é finita (converge), periódica, e concentra-se na cintura. A pergunta do laço de *histerese* (C2, W_{diss}) é o próximo degrau — fica anotada como aplicação aberta de O2 (§6).

5. Não-afirmações (padrão do projeto)

1. S_{cil} **não é** derivada de uma matriz densidade da dinâmica Φ -LIBER completa — é a entropia do sistema de dois níveis (T9) transportada para o círculo por imagens. Estatuto: construção geométrica canônica, um degrau acima da analogia da v25.2 §7, um degrau abaixo de derivação dinâmica — declarado.
2. A aplicação ao blazar/observacional da v25.2 §7 permanece **arquivada como analogia** (veredito da leva 4, inalterado).
3. A dualidade modular (Poisson) de S_{cil} — a forma dual em $1/\Lambda$ — não é afirmada; fica como nota de trabalho.
4. Nada sobre o universo observável; α fenomenológico; S^1_ϵ entra só como produto de ciclos, sem métrica própria declarada neste escrito.
5. O "toro plano" (ramo a de T11) não foi escolhido — é o limite $\alpha \rightarrow 0$, registrado como geometria sem achado.

6. O que se abre

- **O2 — núcleo respondido** (T11, T12, P7); aplicação aberta: a entropia do laço de histerese (a pergunta integral do autor) — o candidato natural é identificar o ciclo de histerese no espaço de composição com um ciclo de período efetivo $\Lambda(J_{\max}, T)$ e ler S_{cil} sobre ele. Território do escrito nº 9 ou de O3, a decidir pelo autor.
- **O5 (informação no horizonte)** ganha um irmão: a contagem de estados no funil — o volume de Fisher do cilindro é *finito por período*, ao contrário do disco aberto (divergência logarítmica). A regularização que O5 pedia pode ser exatamente a periodificação: anotado.

Referências (acréscimos)

43. do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall (Gauss-Bonnet — T11).
44. Buser, P. (1992). *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser (quocientes $H^2/(\text{boost})$, cilindros e cinturas — T11-b, T12).

Reprodutibilidade: philiber/toro.py + tests/test_toro.py (7 testes; suíte total: **116 verdes** — philiber v2.2.0). Valores de $P7$ reproduzíveis por `razao_cintura( $\Lambda$ )`; a verificação exploratória original está no log da sessão (somas de imagens, 3–39 imagens por truncamento adaptativo).