

A Ponte Hiperbólica XI — A geometria como prior (a leitura bayesiana do Φ -Liber)

Escrito nº 11 · 17/08/2026 Método: derivação analítica completa + bateria de 7 verificações numéricas (_verificacao_p14_prior.py) + 7 testes (tests/test_prior.py, verdes). Suíte total: **169 verdes** (philiber v2.5.0). Base: T13 (nº 9), T9 (nº 7), A3–A4 (Fundacional), rascunho 17/08 (P14, já promovida ao Fundacional por sanção do autor).

Origem declarada: a pergunta nasceu da leitura do autor — "interpretação bayesiana de regularização de kernel" (parecer de triagem 16/08/2026, TaoQiOm Doc. 001, Parte 1, tema 6). O que ali era correlação candidata [H] é aqui teorema. A etiqueta [H] morre neste escrito — registrada, não apagada.

1. A pergunta

T13 (nº 9) estabeleceu a medida estacionária em rapidez:

$$P_{eq}(\tau) \propto e^{-V(\tau)/T} \cdot (1 - \alpha \cdot a(\tau)^2)$$

com o Jacobiano da coordenada entrando como fator obrigatório (P8: rms 1,4% com, 5,6% sem). A pergunta deste escrito: **o que é, em linguagem de inferência, esse fator geométrico?** Resposta: é um prior — e não um prior qualquer: é a informação de Fisher da coordenada.

2. Teorema 16 — Jacobiano = Fisher-Rao

T16. Seja $a(\tau) = \tanh(\sqrt{\alpha}\tau)/\sqrt{\alpha}$ a inversa da rapidez (A4). Então o Jacobiano da mudança de coordenada é exatamente a métrica de Fisher-Rao do sistema de dois níveis (R5 do dicionário T9), no parâmetro $x = \sqrt{\alpha}\tau$:

$$1 - \alpha \cdot a(\tau)^2 = \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}\tau) = g_F(\sqrt{\alpha}\tau)$$

Prova. $\alpha \cdot a(\tau)^2 = \tanh^2(\sqrt{\alpha}\tau)$ pela definição de $a(\tau)$. Então $1 - \alpha a^2 = 1 - \tanh^2(\sqrt{\alpha}\tau) = \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}\tau)$, pela identidade fundamental da $\tanh$. Por R5 (escrito nº 7, T9), $g_F(x) = \partial^2 \ln Z / \partial x^2 = \operatorname{sech}^2 x$; com $x = \sqrt{\alpha}\tau$, segue a igualdade. $\square$ Verificação: bateria (ii), desvio máximo $4,8 \times 10^{-16}$ — precisão de máquina.

Corolário imediato (a tese do escrito). Substituindo em T13:

$$P_{eq}(\tau) \propto e^{-V(\tau)/T} \cdot g_F(\sqrt{\alpha}\tau)$$

— a medida estacionária do Φ -Liber fatora como **verossimilhança** $\times$ **prior**, onde o prior é a densidade de Fisher da coordenada. A geometria hiperbólica ($K = -4\alpha$, T3) não decora a inferência: ela é a estrutura de prior do modelo.

3. Teorema 17 — O prior é próprio, e é uma logística

T17. O prior Jacobiano é normalizável no disco $|a| < c_{LIBER}$ e, em coordenada de rapidez, é uma distribuição logística:

(a) $\int_{-c}^c (1 - \alpha a^2) da = 4/(3\sqrt{\alpha})$, $c = 1/\sqrt{\alpha}$ — logo $\pi(a) = (3\sqrt{\alpha}/4)(1 - \alpha a^2)$; (b) $\pi(\tau) = (\sqrt{\alpha}/2) \cdot \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}\tau) = \textbf{Logística}(0, s)$ com escala $s = 1/(2\sqrt{\alpha}) \approx 2,3063$.

Prova. (a) $\int_{-c}^c (1 - \alpha a^2) da = [a - \alpha a^3/3]_{-c}^c = 2c(1 - \alpha c^2/3) = 2c \cdot (2/3) = 4c/3 = 4/(3\sqrt{\alpha})$. $\square$ (b) $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}\tau) d\tau = [\tanh(\sqrt{\alpha}\tau)/\sqrt{\alpha}]_{-\infty}^{\infty} = 2/\sqrt{\alpha}$, logo $\pi(\tau) = (\sqrt{\alpha}/2) \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}\tau)$ normaliza. A densidade logística padrão com escala s é $(1/4s) \operatorname{sech}^2(\tau/2s)$; igualando $1/(4s) = \sqrt{\alpha}/2$ e $1/(2s) =$

$\sqrt{\alpha}$, ambas dão $s = 1/(2\sqrt{\alpha})$. $\square$ *Verificação: bateria (i) — Z numérico vs analítico, erro $1,5 \times 10^{-12}$; bateria (iii) — $\int \pi(\tau) d\tau = 0,9999955$ (grade $\tau \in [-30; 30]$, truncamento declarado).*

Leitura. O dicionário T9 ganha sua entrada mais curta: **rapidez $\leftrightarrow$ logística**. A geometria hiperbólica, lida probabilisticamente, é a distribuição mais usada da modelagem de escolha — o mesmo objeto que a econometria chama de logit. Anotado para a ponte com as ciências sociais do corpus (Quatinga Velho), sem afirmar nada além da identidade.

4. Teorema 18 — A entropia do prior

T18. *A entropia diferencial do prior geométrico em rapidez é exata:*

$$h[\pi] = 2 - \ln(2\sqrt{\alpha}) \approx 2,8357 \text{ nats}$$

Prova. Se Y é logística padrão (escala 1) e $X = sY$, então $h[X] = h[Y] + \ln s$. Para Y padrão, $f(y) = \frac{1}{4} \text{sech}^2(y/2)$, e

$$h[Y] = \ln 4 + 2 \cdot \frac{1}{4} \int \text{sech}^2(y/2) \cdot \ln \cosh(y/2) dy.$$

Com $w = \tanh(y/2)$ ($dw = \frac{1}{2} \text{sech}^2(y/2) dy$) e $\ln \cosh(y/2) = -\frac{1}{2} \ln(1-w^2)$:

$$\frac{1}{4} \int \text{sech}^2(y/2) \ln \cosh(y/2) dy = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \ln(1-w^2) dw = -\frac{1}{2} \int_0^1 [\ln(1-w) + \ln(1+w)] dw = -\frac{1}{2} (2 \ln 2 - 2) = 1 - \ln 2.$$

Logo $h[Y] = \ln 4 + 2(1 - \ln 2) = 2$. Com $s = 1/(2\sqrt{\alpha})$: $h[\pi] = 2 + \ln s = 2 - \ln(2\sqrt{\alpha})$. $\square$ *Verificação: bateria (iii) — 2,835590 numérico vs 2,835657 analítico (erro $6,7 \times 10^{-5}$, truncamento de grade declarado).*

Leitura. $h[\pi]$ cresce quando α diminui: quanto mais plano o espaço ($K = -4\alpha \rightarrow 0$), mais "difuso" o prior — a geometria menos informativa é a menos curva. A curvatura é informação a priori, com quantidade exata.

5. Teorema 19 — O custo do horizonte

T19. *O prior entra na energia livre efetiva como $F_{\text{prior}}(\tau) = -T \ln \text{sech}^2(\sqrt{\alpha}\tau) = 2T \ln \cosh(\sqrt{\alpha}\tau)$, que é par, convexo, nulo no centro e linearmente divergente: $F_{\text{prior}} \sim 2\sqrt{\alpha}T \cdot |\tau| - 2T \ln 2$ quando $|\tau| \rightarrow \infty$.*

Prova. $-\ln \text{sech}^2(x) = 2 \ln \cosh(x)$ (definição). Paridade e convexidade: $\cosh$ é par e $\ln \cosh$ é convexo ($d^2/dx^2 \ln \cosh x = \text{sech}^2 x \geq 0$). Assíntota: $\ln \cosh x = x - \ln 2 + o(1)$ para $x \rightarrow +\infty$. $\square$ *Medido: $F_{\text{prior}}(k/\sqrt{\alpha}) = 0,868T; 2,650T; 4,619T$ para $k = 1, 2, 3$ (bateria vii).*

Leitura. O nº 9 escreveu "a geometria encarece a vizinhança do horizonte". T19 tabela o preço: cada unidade de rapidez em direção ao horizonte custa $\sim 2\sqrt{\alpha}T$ de energia livre entrópica — barreira linear, não apenas estética. Combinado com T14 (cancelamento de Kramers), o quadro se fecha: o referencial de rapidez é completo e o horizonte é caro — as duas afirmações coexistem sem tensão, porque o cancelamento é sobre a taxa, e o custo, sobre a medida.

6. Corolários

C6 (Concentração). $P(|\tau| \leq 1/\sqrt{\alpha}) = \tanh(1) = 76,16\%$. *Prova:* $\int_{-1/\sqrt{\alpha}}^{1/\sqrt{\alpha}} (\sqrt{\alpha}/2) \text{sech}^2(\sqrt{\alpha}\tau) d\tau = \frac{1}{2} [\tanh]_{-1}^1 = \tanh(1)$. $\square$ Três quartos do prior geométrico vivem a uma unidade de rapidez do centro — a geometria concentra onde a composição é quase linear (cf. C5: o ruído concentra onde ela satura; os dois fatos são a mesma sech^2 lida por dois lados).

C7 (Regularizações irmãs — observação, não teorema). O volume de Fisher do disco aberto diverge logaritmicamente (O5), mas a densidade de Fisher integra finito (T17-a: $Z = 4/(3\sqrt{\alpha})$). A mesma g_F diverge como *medida de volume* e normaliza como *medida de probabilidade* — a diferença é a raiz: $\int g_F$ vs $\int (\sqrt{g_F})^2$. A periodificação (T11, cilindro) regulariza o volume; o Jacobiano (T13/T16) regulariza a medida. *Registrada como observação para O5; nada aqui fecha O5.*

7. A âncora medida (P14, Fundacional)

A fatoração é exata; o que se *mede* é quanto ela importa: KL entre a medida completa (T13) e a Gibbs ingênua, por quadratura determinística:

T	KL(cheia ingênua)	desvio rms
0,05	$1,5 \times 10^{-4}$ nats	1,2%
0,10	$2,9 \times 10^{-4}$	1,7%
0,20	$6,0 \times 10^{-4}$	2,4%
0,40	$1,3 \times 10^{-3}$	3,5%
0,80	$2,4 \times 10^{-3}$	5,0%

Pequeno, não nulo, crescente em T — consistente com P8 (1,4%/5,6% em Monte Carlo). O prior geométrico é correção fina no centro e estrutural na cauda.

8. Não-afirmações (seção obrigatória)

1. **O prior Jacobiano NÃO é o prior de Jeffreys.** Jeffreys $1D \propto \sqrt{g_F} = \text{sech}(\sqrt{\alpha}\tau)$; o nosso é $g_F = \text{sech}^2$. KL entre eles: 0,145 nats (reverso 0,229) — próximos, distintos. Este escrito não reivindica invariância de Jeffreys; reivindica a identidade Jacobiano = Fisher (T16), que é mais elementar e exata.
2. "Bayesiano" aqui qualifica o **modelo Φ -Liber** (fatoração da medida estacionária), não o mecanismo de geração de LLMs — distinção registrada no parecer (Parte 2, Classe C).
3. A identidade rapidez $\leftrightarrow$ logística (T17) é matemática, não empírica: nada se afirma sobre dados de escolha social sem calibração.
4. Regime monoagente, $J = 0$, potencial LIBER padrão ($m^2 = e$, $b = 1$). A versão multivariada depende de O6 (proposta pendente de sanção).
5. α permanece fenomenológico (A3): nada aqui deriva α ; a estrutura é invariante por reescalonamento, só c_{LIBER} é estrutural.

9. Referências de ancoragem

45. Jeffreys, H. (1946). *An invariant form for the prior probability in estimation problems*. Proc. R. Soc. A 186, 453 (o prior que este escrito NÃO usa — §8.1).
46. Amari, S. (2016). *Information Geometry and Its Applications*. Springer (g_F como objeto central — já ref. 41 do nº 7; aqui promovida a prior).
47. Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer (priors objetivos e suas armadilhas — o pano de fundo da §8.1).

Reprodutibilidade: philiber/prior.py + _verificacao_p14_prior.py + tests/test_prior.py (7 testes). *Estatuto:* T16-T19 provados; C6 provado; C7 observação; âncora medida = P14 (Fundacional Parte IV). A candidata [H] do parecer de 16/08 morre aqui — promovida, com a etiqueta arquivada neste cabeçalho.