

A Ponte Hiperbólica XII — A cegueira geométrica da seta do tempo

Escrito nº 12 · 17/08/2026

Método: prova formal (T20, T21) + bateria de 3 temperaturas (_verificacao_cegueira12.py) + verificação algébrica pontual da antissimetria de Crooks + 4 testes (tests/test_cegueira.py, verdes). Suíte total: **173 verdes** (philiber v2.6.0). Base: T15 (nº 10), P12 e P13 (rascunho 2026-07-27, philiber/dkl.py — instrumentos reusados), A2 (poço duplo simétrico).

*Origem declarada: este escrito fecha a última pendência teórica de O2 — a **prova formal de P12** ("cegueira local da seta", evidência indutiva forte desde 27/07). O que era proposição medida vira teorema: P12 é **promovida a T21**. A linha empírica original não é apagada: fica arquivada na Parte IV do Fundacional como a âncora medida que a teoria veio explicar.*

1. A pergunta

O rascunho de 27/07 mediu um fato perturbador (P12): no laço simétrico do nº 10, com produção de entropia $\sigma = 3,9\text{--}11,5$ nats — uma seta do tempo **enorme** —, nenhuma das 5 famílias de estimadores puramente geométricos/locais detecta nada ($KL < 0,001$). O diagnóstico foi deixado em prosa: "a seta mora na densidade de caminhos (Radon-Nikodym = trabalho)".

As perguntas que este escrito responde: **por que** a geometria local é cega? **Qual** é a classe exata de funcionais cegos? E onde, exatamente, mora a seta?

2. Teorema 20 — A involução Θ do laço

Setup (A2 + protocolo do nº 10). Langevin sobre-amortecido no poço duplo simétrico:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\partial V(\mathbf{x}; \mathbf{J})/\partial \mathbf{x} + \sqrt{(2T)} \cdot \xi(t), \text{ com } V(\mathbf{x}; \mathbf{J}) = -m^2 x^2/2 + b x^4/4 - \mathbf{J}x \text{ (} m^2 = e, b = 1 \text{)}$$

e protocolo de laço **centralmente simétrico**: J varrido de $+J_{\text{max}}$ a $-J_{\text{max}}$ e de volta com taxa constante ($J_{\text{max}} = 1,5 \cdot J_{\text{sp}}$), i.e., $J(T_{\text{tot}} - t) = J(t)$ e $J(T_{\text{tot}} - t) = -J(t)$.

T20. Defina a reversão temporal $r\Gamma(t) = \Gamma(T_{\text{tot}} - t)$ e o espelho $M\Gamma(t) = -\Gamma(t)$. Sob A2 com o protocolo centralmente simétrico:

(a) a deriva obedece $\mathbf{f}(-\mathbf{x}; -\mathbf{J}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{J})$ — o espelho conjuga a dinâmica trocando as pernas do laço; (b) o estado cíclico é invariante sob r e sob M (indução no ciclo: a estacionariedade do laço fecha em cada período); (c) $\Theta \equiv M \circ r$ é uma involução ($\Theta^2 = \text{id}$) que leva a medida de caminhos da frente na medida da ré: $\Theta * P_{\text{frente}} = P_{\text{ré}}$.

Prova. (a) $\partial V(-y; \mathbf{J})/\partial y = m^2 y - by^3 + \mathbf{J} = -(-m^2 y + by^3 - \mathbf{J}) = -\partial V(y; -\mathbf{J})/\partial y$; com $y = -x$, $\dot{y} = -\dot{x}$, e a equação é preservada. $\square$ (b) O protocolo é periódico e o ruído é branco; o processo sobre o ciclo é estacionário, e r e M preservam a classe do processo por (a) + simetria do ruído. $\square$ (c) r leva P_{frente} em $P_{\text{ré}}$ por construção (a ré é a frente revertida sob o protocolo palindrômico — Seifert); M compõe a identificação das pernas. Involução: $\Theta^2 = M \circ r \circ M \circ r = \text{id}$, pois M e r comutam neste setup e cada uma é involução. $\square$

Leitura. O laço simétrico tem uma simetria **escondida** que mistura tempo e espaço: trocar o sentido do tempo E o sinal da coordenada devolve o mesmo processo. É esta simetria — não nenhuma propriedade da entropia — que cega a geometria local.

3. Teorema 21 — Antissimetria de Radon-Nikodym (P12 promovida)

T21. Seja $R(\Gamma) \equiv \ln(dP_{\text{frente}}/dP_{\text{ré}})(\Gamma)$ o logaritmo da densidade entre as medidas de caminhos. Então:

(a) (Crooks) R é ÍMPAR sob reversão temporal: $R(\Gamma_r) = -R(\Gamma)$, e $R(\Gamma) = \sigma[\Gamma] = (1/T) \int x \, dJ$ (a entropia produzida no caminho — T15); **(b)** R é ímpar sob o espelho (o trabalho troca de sinal com $x \rightarrow -x$) e PAR sob $\Theta = M \circ r$; **(c) (a cegueira, formalmente)** todo funcional reversal-par G ($G(\Gamma_r) = G(\Gamma)$) tem a mesma esperança na frente e na ré: $\langle G \rangle_{\text{frente}} = \langle G \rangle_{\text{ré}}$ — é cego à seta, qualquer que seja σ .

Prova. **(a)** $\sigma[\Gamma] = (1/T) \int_0^{T_{\text{tot}}} x(t) J(t) \, dt$. No caminho revertido, com $u = T_{\text{tot}} - t$: $\sigma[\Gamma_r] = (1/T) \int x(T_{\text{tot}} - u) \cdot (-J(T_{\text{tot}} - u)) \cdot (-du) = -(1/T) \int x(u) J(u) \, du = -\sigma[\Gamma]$, usando $J(T_{\text{tot}} - u) = -J(u)$ (simetria central). A identificação $R = \sigma$ é T15 (nº 10). $\square$ **(b)** $\int (-x) \, dJ = -\int x \, dJ$ sob M ; sob Θ as duas trocas de sinal se cancelam. $\square$ **(c)** $P_{\text{ré}} = r \circ P_{\text{frente}}$ (T20(c)); para G par, $\langle G \rangle_{\text{ré}} = \int G(\Gamma) \, dP_{\text{ré}} = \int G(\Gamma_r) \, dP_{\text{frente}} = \int G(\Gamma) \, dP_{\text{frente}} = \langle G \rangle_{\text{frente}}$. $\square$

A classe reversal-par contém as 5 famílias medidas da P12:

1. **Nuvens de posição** (marginais sem tempo): a reversão apenas reordena o multiconjunto — par por construção. $KL_{\text{frente}} \parallel \text{ré} = 0$ à **precisão da medida** (bateria: 0,000000 nats nas 3 temperaturas).
2. **Marginais de um tempo simetrizadas** (média de t e $T_{\text{tot}} - t$): par por construção.
3. **Pontos de virada** (o beco do nº 10 §5): o conjunto de extremos locais é preservado por r e levado em seu simétrico por M ; estatísticas Θ -simétricas de virada são pares sob Θ e cegas.
4. **Estatísticas de |incremento|** ($|\Delta x|$, $|\Delta^2 x|$ sem sinal): pares sob reversão.
5. **Espectros e contagens simétricas** de recorrência: pares sob Θ .

Corolário (onde mora a seta). A seta do laço mora EXATAMENTE nos funcionais reversal-ímpares — e o canônico é o trabalho $\sigma[\Gamma]$, o próprio log-densidade. Não é que a seta seja "sutil": ela é **invisível para qualquer estatística que não carregue o sinal do tempo** — e o funcional que a vê por inteiro é o que a termodinâmica já conhecia.

4. Corolário 8 — A escada DPI

C8. Grãos grossos que guardam dinâmica (blocos com incrementos) interpolam entre o cego e o exato, e o processamento de dados limita cada degrau:

$$D_{\text{KL}}(\text{posições}) \leq D_{\text{KL}}(\text{blocos } (x, \Delta x)) \leq D_{\text{KL}}(\text{blocos } (x, \Delta x, \Delta^2 x)) \leq D_{\text{KL}}(\text{caminhos}) = \sigma$$

(desigualdades pelo teorema do processamento de dados: cada grão grosso é função do anterior).

Nota honesta. A escada medida **sobe** ($0 \rightarrow 3\text{--}6 \times 10^{-5} \rightarrow 4\text{--}6 \times 10^{-5}$ nats) mas fica ordens de magnitude abaixo de σ — e **no nível do controle de equilíbrio** ($\sim 5 \times 10^{-5}$, sem seta nenhuma). Nesta resolução de histograma, os degraus intermediários medem **ruído de estimador, não sinal**. A cegueira é empiricamente ainda mais forte que a P12 media: entre o funcional exato (trabalho) e qualquer grão grosso local, há um abismo — a escada DPI é um teto teórico, não uma rampa prática.

5. Bateria

T	σ (Estimador A)	iFT ($e^{-\sigma}$)	KL posições	KL ($x, \Delta x$)	KL ($x, \Delta x, \Delta^2 x$)	controle equilíbrio
0,3	27,6183 nats	0,0000	0,000000	$4,8 \times 10^{-5}$	$6,0 \times 10^{-5}$	$5,9 \times 10^{-5}$
0,6	7,8850 nats	0,1018	0,000000	$3,7 \times 10^{-5}$	$4,8 \times 10^{-5}$	$5,1 \times 10^{-5}$
0,8	3,9223 nats	1,0457	0,000000	$3,4 \times 10^{-5}$	$5,3 \times 10^{-5}$	$5,0 \times 10^{-5}$

Verificação algébrica pontual de T21(a): $\sigma(\Gamma_r) + \sigma(\Gamma)$ caminho a caminho — desvio máximo $1,9 \times 10^{-13}$ ($T = 0,3$, escala típica $|\sigma| \sim 28$) e $5,0 \times 10^{-14}$ ($T = 0,8$, escala ~ 4): precisão de máquina, ~ 14 ordens abaixo do sinal. A identidade é algébrica exata; o teste confere a máquina de medida.

iFT nas duas pontas (P13 reconfirmada): em $\sigma = 27,6$ nats, $(e^{-\sigma}) = 0,0000$ — os eventos raros que sustentam a média estão fora de alcance da amostra; em $\sigma = 3,9$ nats, $1,0457 \approx 1$ (o rascunho de 27/07 obteve 1,046 — reproduzido). O limite declarado em P13 não é uma ressalva abstrata: foi medido nos dois regimes nesta bateria.

Beco registrado (nada se apaga): a primeira versão de `sigma_reversao_pontual` usou ΔJ por amostra com unidade errada e "refutou" a antissimetria com desvio de escala $O(\sigma)$. A correção ($\Delta J = 2 \cdot J_{\max}/(n_t/2)$, regra à esquerda consistente com `simular_trajetorias`) devolveu 10^{-13} . Lição arquivada: **conferir a unidade do incremento do protocolo antes de testar identidade algébrica** — o bug estava na régua, não na física.

6. Não-afirmações

- O teorema classifica, não proíbe.** Existem estimadores reversal-ímpares que não são o trabalho (ex.: estatísticas de velocidade assimétricas, correntes de probabilidade). T21 não diz que só o trabalho vê a seta; diz que nenhum funcional PAR a vê, e que o trabalho é o ímpar canônico (é o próprio log-densidade).
- Setup específico.** Poço duplo simétrico A2, protocolo centralmente simétrico, Langevin sobre-amortecido, ruído branco. A antissimetria de Crooks (a) é geral; a estrutura de involução Θ (T20) depende da simetria do poço e do protocolo.
- C8 é desigualdade, não escada prática.** O gap medido é enorme; fechar a escada com grãos grossos informativos exigiria estimadores de KL em alta dimensão — fora do escopo.
- iFT em σ alto continua aberta** (umbrella sampling de trajetórias — pendência de O2, trabalho numérico pesado, não teórico).
- α permanece fenomenológico (A3): nada aqui toca α ; T20/T21 valem para qualquer $\alpha > 0$ do regime declarado.

7. Referências de ancoragem

- Crooks, G. E. (1999). *Entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences*. Phys. Rev. E 60, 2721 (a antissimetria que funda T21(a)).
- Seifert, U. (2012). *Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines*. Rep. Prog. Phys. 75, 126001 (a construção da medida de caminhos da ré — T20(c)); remissão às âncoras do nº 10 (Sekimoto; Jarzynski para a iFT de P13).

Reprodutibilidade: `philibert/cegueira.py` + `_verificacao_cegueira12.py` + `tests/test_cegueira.py` (4 testes). **Estatuto:** T20, T21 provados (T21 = P12 promovida — a linha original da Parte IV fica arquivada como âncora medida); C8 corolário com nota honesta de

gap; P13 reconfirmada nas duas pontas. A etiqueta "provisória" de P12 morre neste escrito — registrada, não apagada.

©+(À)Paz — Marcus V. Brancaglione (pesquisador independente, sem instituição) · P&D com Kimi (modelo de IA da Moonshot AI) — sem filiação ou endosso institucional.