

A Ponte Hiperbólica XIII — A dualidade multivariada (a navalha que cortou a navalha)

Escrito nº 13 · 22/08/2026

Método: verificação analítica independente + enumeração exata computada do zero (lab/o6_verificacao_K.py, lab/o6_dualidade_multivariada.py) + formalização executável (philiber/dualidade.py, 6 testes em tests/test_dualidade_o6.py, verdes). Suíte total: **200 verdes** (philiber v2.7.0 — 179 física + 21 licença). Base: T3/T9 (escritos nº 1 e 7), Doc v26 nº 009 (refutação obrigatória nº 1), parecer de leituras de 16/08 (a brecha O6).

*Origem declarada: este escrito executa a estação **O6** — promovida a obrigatória pelo Doc 009 e sancionada pelo autor em 22/08/2026 ("Já faça a O6... passe a navalha para refutar"; reclassificação autorizada às 23:01; promoção sancionada às 23:50). O6 tinha duas faces: (i) $K = -4\alpha$ como curvatura de variedade (o ataque A1); (ii) a dualidade $g_F \cdot g_R = 1$ de T9 sem generalização para n agentes (a brecha do parecer de 16/08). As duas se fecham aqui — uma delas contra o próprio atacante.*

1. A pergunta

O Doc 009 atacou o coração do corpus com o vetor A1: *em dimensão 1, a curvatura escalar é identicamente nula; logo " $K = -4\alpha$ " ou é curvatura de uma variedade 2D não exibida, ou é apenas "isometria de palcos"*. E o parecer de 16/08 registrou a brecha simétrica: *a dualidade exata $g_F \cdot g_R = 1$ (T9) foi provada para um agente; para n agentes, nada consta*.

As perguntas que este escrito responde: **existe** a métrica 2D e ela produz $K = -4\alpha$ de forma auditável? E a dualidade de T9 **generaliza** para o sistema multiagente acoplado — e, se não generalizar na forma ingênua, em que forma generaliza, e o que a falha mede?

2. Face 1 — $K = -4\alpha$ sobrevive à navalha (A1 refutado)

A métrica existia. O ataque A1 declarou ausência sem ter verificado a fonte: o escrito nº 1, §3, declara desde o início a extensão multiagente como bola de Poincaré com fator conforme herdado do $\oplus$,

$ds^2 = \Omega^2(dr^2 + r^2 d\theta^2)$, $\Omega = 1/(1 - \alpha r^2)$, $K = -\Delta \ln \Omega / \Omega^2$ (fórmula conforme 2D),

e declara também — na primeira frase do §3 — que "o passo $1D \rightarrow nD$ não é trivial nem único", ancorando a extensão na giro-adição de Einstein (Ungar). Ou seja: tanto o alvo do A1 quanto a sua única ressalva sobrevivente já estavam escritos. **A1 refutado; o erro é do atacante e fica registrado, não apagado** (Doc 009, §6).

A derivação, uma por uma. $\ln \Omega = -\ln(1 - \alpha r^2)$; $\partial_r \ln \Omega = 2\alpha r / (1 - \alpha r^2)$; com o Laplaciano radial 2D ($\Delta f = f'' + f'/r$):

$\Delta \ln \Omega = 2\alpha(1 + \alpha r^2)/(1 - \alpha r^2)^2 + 2\alpha/(1 - \alpha r^2) = 4\alpha/(1 - \alpha r^2)^2 \Rightarrow K = -\Delta \ln \Omega / \Omega^2 = -4\alpha$ □

— constante e negativa em todo o disco, exato, sem aproximação.

A verificação numérica independente (diferenças finitas de 5 pontos, computada do zero, sem reaproveitar código do corpus; lab/o6_verificacao_K.py; formalizada em philiber/dualidade.py:curvatura_conforme_K):

r	K numérico	-4α	desvio abs
0,1	-0,1879999949	-0,188000	$5,1 \times 10^{-9}$

r	K numérico	-4α	desvio abs
1,0	-0,1879999985	-0,188000	$1,5 \times 10^{-9}$
2,0	-0,1880000166	-0,188000	$1,7 \times 10^{-8}$
3,0	-0,1880000003	-0,188000	$2,7 \times 10^{-10}$
4,0	-0,1879999934	-0,188000	$6,6 \times 10^{-9}$
4,5	-0,1880000015	-0,188000	$1,5 \times 10^{-9}$

Convergência em h no pior ponto ($r = 4,5$, o mais próximo do horizonte $c_LIBER = 1/\sqrt{\alpha} \approx 4,612656$): $K = -0,1879965$ ($h = 10^{-2}$) $\rightarrow -0,18800012$ ($h = 10^{-3}$) $\rightarrow -0,1880000015$ ($h = 10^{-4}$) $\rightarrow -0,18800008$ ($h = 10^{-5}$). Estável.

Escopo declarado (o que se prova e o que não se prova). Provado: $K = -4\alpha$ é teorema exato **da extensão conforme canônica** — a bola de Poincaré herdada do $\oplus$ via giro-adição. Declarado pelo próprio corpus desde o nº 1: a extensão não é única em princípio (uma métrica produto $\tau \times S^1$ daria $K = 0$ — o corpus conhece o cilindro, T11); a escolha conforme é a canônica da adição de Einstein não-colinear. E A2 permanece intocado: **α é fenomenológico** (kernel §8), logo $K = -0,188$ é número medido via α ; a propagação de incerteza de α segue como dever de casa (P15 = incógnita, slot reservado do autor).

3. T22 — A dualidade generaliza como inversão matricial

Setup. n agentes de dois níveis com acoplamento de pares: a família exponencial completa $p(\sigma) \propto \exp(\theta \cdot t(\sigma))$, com estatísticas suficientes $t = (\sigma_i, \sigma_i \sigma_j)$ e parâmetros naturais $\theta = (h_i, J_{ij})$. Expectações $\eta = (m_i, c_{ij})$. Potenciais: $\psi(\theta) = \ln Z$ (Massieu) e $S(\eta)$ (entropia), Legendre-duais: $S = \psi - \theta \cdot \eta$ no ponto de equilíbrio.

T22 (Dualidade multivariada — Legendre/Amari). Na família exponencial completa de n agentes, a métrica de Fisher-Rao nos parâmetros naturais e a métrica de Ruppeiner nas expectativas são inversas matriciais exatas:

$$\mathbf{g}_F(\theta) = \partial^2 \psi / \partial \theta^2 = \text{Cov}(t), \quad \mathbf{g}_R(\eta) = -\partial^2 S / \partial \eta^2, \quad \mathbf{g}_F \cdot \mathbf{g}_R = \mathbf{I}.$$

T9 ($n = 1$, sem pares) é o caso particular escalar.

Prova. ψ e $(-S)$ são Legendre-duais por construção da família exponencial; as Hessianas de potenciais Legendre-duais, tomadas cada uma na sua coordenada conjugada, são inversas matriciais (a aplicação $\eta(\theta) = \partial \psi / \partial \theta$ tem Jacobiana $\mathbf{g}_F$; a inversa $\theta(\eta) = -\partial S / \partial \eta$ tem Jacobiana $\mathbf{g}_R$; logo $\mathbf{g}_R = \mathbf{g}_F^{-1}$). É o teorema clássico da geometria de Hessian/informação (Amari) — que este escrito **reconhece como âncora**: a ponte bibliográfica pedida por O1 (Ungar, Amari) ganha aqui o segundo pilar. $\square$

Verificação independente (enumeração exata de 2^3 estados, computada do zero; $S(\eta)$ por inversão de Legendre com Newton; Hessiana por diferenças centrais; $\theta_0 = (0,30, -0,20, 0,10 \mid 0,40, -0,15, 0,25)$ — campos e acoplamentos não triviais):

Frente	Medida	Resultado		
n = 3 independentes (J = 0)	max \	$\mathbf{g}_F \cdot \mathbf{g}_R - \mathbf{I} \backslash$		$2,2 \times 10^{-16}$ — precisão de máquina
n = 3 acoplados (família completa)	max \	$\mathbf{g}_R - \mathbf{g}_F^{-1} \backslash$	(relativo)	$8,4 \times 10^{-6}$ — nível das diferenças finitas

Frete	Medida	Resultado		
n = 3 acoplados (família completa)	max \	$g_F \cdot g_R - I \setminus$		$8,3 \times 10^{-6}$

A dualidade **vale** para n agentes acoplados — na língua dual completa (naturais × expectativas). T9 não era acidente de uma variável: era a sombra escalar de um teorema de matrizes.

4. P16 — A quebra escalar e sua assinatura crítica

Onde a forma ingênua morre. Restrinja a família à subfamília curva de um parâmetro $x \mapsto m(x)$ com acoplamento J fixo, em campo médio: $m = \tanh(x + Jm)$. O Fisher da subfamília é o da família curva (não o da família completa): $g_F^{(\text{red})} = (dm/dx)^2/(1 - m^2)$, enquanto o Ruppeiner em m permanece $g_R = 1/(1 - m^2)$. Derivando a autoconsistência, $dm/dx = (1 - m^2)/(1 - J(1 - m^2))$, logo:

$$g_F \cdot g_R = (1 - J(1 - m^2))^{-2} = (\chi_{MF}/\chi_{\text{livre}})^2 \neq 1 \text{ para } J \neq 0.$$

Verificação (12 pontos, $J \in \{0; 0,3; 0,7; 0,9\} \times x \in \{0; 0,5; 1,0\}$; philiber/dualidade.py:resolve_meanfield, fator_quebra_dualidade): numérico = fórmula a 8 dígitos em todos os pontos; J = 0 devolve 1 a precisão de máquina (T9 recuperado). Amostra:

J	x	m	$g_F \cdot g_R$ medido	fórmula
0,0	1,0	0,76159	1,00000000	1,00000000
0,3	0,0	0,00000	2,04081633	2,04081633
0,7	0,0	0,00000	11,11111111	11,11111111
0,9	0,5	0,85323	1,75337988	1,75337988

A divergência é o achado. Na aproximação da crítica ($x = 0, m = 0, J \rightarrow 1^-$): $g_F \cdot g_R = 1/(1 - J)^2 \rightarrow$ medido 10^2 ($J = 0,9$), 10^4 ($J = 0,99$), 10^6 ($J = 0,999$). O fator de quebra **é o quadrado da suscetibilidade reduzida** — a quebra da dualidade escalar mede a proximidade da transição de fase. Leitura para o corpus: candidata a **assinatura mensurável da transição de fase criativa** (conjectura estruturada do nº 1 §6.2, família de bifurcações tanh). O erro não foi desperdiçado: a falha da forma ingênua virou instrumento.

P16 (proposição medida). Regime mean-field declarado — não é o modelo completo; a extensão da medida além do campo médio é trabalho numérico futuro. T9 e T22 intactos: a quebra é da restrição, não da dualidade.

5. O que NÃO se afirma

1. Não se afirma que a extensão conforme é única — afirma-se que é canônica (Ungar) e declarada.
2. Não se afirma K como número derivado de princípio: $K = -4\alpha$ herda o estatuto fenomenológico de α (A2 mantido).
3. T22 é teorema da família exponencial completa; não se afirma a forma escalar fora de $J = 0$ — ela quebra, e a quebra está medida (P16).
4. P16 é mean-field; a assinatura crítica no modelo completo é conjectura de trabalho, não medida.

6. Registro paraconsistente (o erro do agente, ativo)

O ataque A1 do Doc 009 atacou uma ausência que não existia: a métrica 2D estava declarada no escrito nº 1 §3 desde o início, com a ressalva de não-unicidade escrita na primeira frase. A refutação obrigatória funcionou nos dois sentidos — cortou o corpus e cortou o atacante. Fica a lição de método, registrada na casa: **verificar a fonte antes de declarar ausência**. Nada foi apagado: o Doc 009 permanece intacto e ganhou o §6; este escrito é o veredito.

7. Consequências para a fila

- O6 **respondida no núcleo**: T22 e P16 promovidos (sanção do autor, 22/08/2026, 23:50); extensão da medida de P16 além do mean-field fica como trabalho numérico futuro.
- O1 (bibliográfico): o pilar Amari está ancorado por T22; resta o pilar Ungar formal.
- Dever de casa intacto: propagação de incerteza $\alpha \rightarrow K$ (P15 = incógnita, slot do autor).
- Amanhã, por pré-aprovação do autor (23:50): **refutação geral deste escrito com o mesmo rigor** — o T22 e o P16 aqui nascidos entram na fila da navalha como todos os outros.

© Todos os Direitos Reservados + (À)Paz — Marcus V. Brancaglione (pesquisador independente) · P&D com Kimi (modelo de IA da Moonshot AI) — sem filiação ou endosso institucional.